PRIMJER TIPA TESTA

Vrijeme izrade je 3 sata, zadaci se jednako boduju

(1) Neka je G neciklična grupa reda 4. Utvrditi tačnost sledećih tvdjenja:
 (a) Ne postoji monomorfizam iz G u $\mathbb{Z}_6$.
 (b) Ne postoji epimorfizam iz $\mathbb{Z}_6$ u G.

(2) (a) Neka je R prsten sa jedinicom 1 i postoji element $a \in R$ takav da je $a^2 = 1$. Pokazati da je $S = \{ara | r \in R\}$ potprsten prstena R. Da li $1 \in S$?
 (b) Dokazati da prsteni $2\mathbb{Z}$ i $3\mathbb{Z}$ nisu izomorfni.

(3) Neka je V konačno dimenzioni realni vektorski prostor i $A : V \to V$ linerano preslikavanje. Neka je $B : V \to V$ linearno preslikavanje dato sa $Bv = Av + v$, $v \in V$.
 (a) Ako je $A \circ A = E$, E-identitet, pokazati da je $V = \operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{Im} B$.
 (b) Neka važi $A \circ A = E$ i $A \neq \pm E$. Neka su dalje $\{v_1, \ldots, v_m\}$ i $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ redom baze za $\operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B$. Odrediti matricu za A u bazi $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$.
 (c) Neka važi $V = \operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{im} B$. Ispitati da li tada važi $A \circ A = E$. U slučaju da važi dokazati, u protivnom navesti kontraprimjer.

(4) Neka je A realna matrica reda 3×3 takva da je $A^2 = A + 2E$, gdje je E jedinična matrica. Ako su a, b i c sopstvene vrijednosti za A i važi $abc = -4$, odrediti $a + b + c$.

(5) U trodimenzionom euklidskom prostoru je fiskiran Dekartov koordinatni sistem. Odrediti tačku koja je ortogonalno simetrična tački $(1, 2, 3)$ u odnosu na ravan $3x + 2y + z = 24$.

(6) U ravni Π apsoultne geometrije data je prava p i tačka P takva da $P \notin p$. Pokazati da u ravni Π postoji prava q koja sadrži tačku P i koja ne siječe pravu p.

(7) Kocka se baca 13 puta. Kolika je vjerovatnoća da će biti registrovana tačno dva broja?

(8) Osobe A i B dolaze na fiksirano mjesto u slučajno vrijeme između 8 i 9 sati i ako drugu osobu ne zatekne, osoba A čeka najviše 10 minuta, a osoba B najviše 15 minuta. Kolika je vjrovatnoća da će doći do susreta?

(9) Deset osoba ulazi u lift u prizemlju osmospratne zgrade. Neka je W broj zaustavljanja lifta do izlaska svih putnika. Naći EW i DW.

(10) Funkcija f je lokalno konstanta u tački x_0 ako postoji okolina te tačke na kojoj je f konstanta. Dokazati da ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lokalno konstanta u svakoj tački segmenta $[a, b]$, tada je ona konstantna funkcija na tom segmentu.

(11) Neka je $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ i $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački intervala (a, b). Ako je $f'(x) = g(f(x))$ za svako $x \in (a, b)$, tada je $f \in C^\infty((a, b))$. Dokazati.

(12) Neka je

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dokazati da je f diferencijabilna funkcija u $(0,0)$, a da njeni prvi parcijalni izvodi u imaju prekid u $(0,0)$.

(13) Neka je $f \in C([0,+\infty))$ rastuća funkcija na $[0,+\infty)$. Dokazati da je

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du, \quad x > 0,$$

rastuća funkcija na $[0,+\infty)$.

(14) Neka je $A = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ i neka je $f : A \to R$ nenegativna funkcija, takva da je $\int_A f(x^1,x^2,x^3)dx^1dx^2dx^3 = 0$. Tada skup $\{(x^1,x^2,x^3)|(x^1,x^2,x^3) \in A, f(x^1,x^2,x^3) > 0\}$ ima mjeru nula. Dokazati.

(15) Neka je

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2y, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokažite da

a) integral $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$ ne postoji;

b) $\int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 f(x,y)dxdy = 1.$